Les nombres de Bernoulli

David Ayotte

Midi-conférence de l'AESMUL

6 février 2019

Introduction

Nous connaissons sans doute tous l'existence des trois formules suivantes

$$1+2+3+4+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Une question naturelle à se poser est : existe-t-il une formule générale pour ce type de somme :

$$1^m+2^m+3^m+4^m+\cdots+n^m = \,? \quad m \geq 1.$$

Réponse : **oui !**

Jacob Bernoulli, dans son ouvrage Ars Conjectandi publié en 1713 (après sa mort), a obtenu la formule générale :

$$1^m + 2^m + 3^m + \cdots + n^m = \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} \binom{m+1}{k} B_k n^{m+1-k},$$

où B_k est déterminé par la formule de récurrence

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m+1}{k} B_k = m+1$$

Les nombres rationnels B_k sont aujourd'hui appelés les nombres de Bernoulli.

Les premiers nombres de Bernoulli sont :

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B_k	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$

Que remarquez-vous ?

Les premiers nombres de Bernoulli sont :

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B_k	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$

Que remarquez-vous ?

$B_{2k+1} = 0$ pour $k \geq 1$.

Définition rapide des nombres de Bernoulli

B_k est le nombre satisfaisant l'expansion suivante :

$$\frac{te^t}{e^t - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{t^k}{k!}.$$

Définition rapide des nombres de Bernoulli

B_k est le nombre satisfaisant l'expansion suivante :

$$\frac{te^t}{e^t - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{t^k}{k!}.$$

Remarque. Dans la littérature, il est possible de trouver la définition alternative :

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{t^k}{k!}.$$

La seule différence est que $B_1 = -\frac{1}{2}$.

Théorème de Clausen et Von-Staudt

Pour $k = 1$ et pour tout $k \geq 2$ pair, il existe un entier z_k tel que

$$B_k = -\sum_{\substack{p \text{ premier} \\ (p-1)|k}} \frac{1}{p} + z_k$$

Théorème de Clausen et Von-Staudt

Pour $k = 1$ et pour tout $k \geq 2$ pair, il existe un entier z_k tel que

$$B_k = -\sum_{\substack{p \text{ premier} \\ (p-1)|k}} \frac{1}{p} + z_k$$

Un corollaire de ce théorème est que

$$\text{dénominateur}(B_k) = \prod_{\substack{p \text{ premier} \\ (p-1)|k}} p$$

Par exemple, si $k = 2p$ où $p \equiv 1 \pmod 3$, alors $B_{2p} = \frac{\text{entier}}{6}$.

Les numérateurs sont un peu plus complexes à comprendre.

$$B_{1000000} = -\frac{2095036695911198 9\ldots 9701897606885817}{9361232574111275778185 10}$$

(Calculé par Bernard C. Keller en 2002 à l'aide de son programme CalcBn)

Nombre de chiffres au numérateur : 4767554
Nombre de chiffres au dénominateur : 24.

Congruence de Kummer

Soit $p \geq 3$ un nombre premier et k un entier pair non divisible par $p - 1$. Alors,

(1) $\frac{B_k}{k} \in \mathbb{Z}_{(p)}$;

Congruence de Kummer

Soit $p \geq 3$ un nombre premier et k un entier pair non divisible par $p-1$. Alors,

(1) $\frac{B_k}{k} \in \mathbb{Z}_{(p)}$;

(2) Si l est un entier pair non divisible par $p-1$ tel que $k \equiv l \pmod{p-1}$, alors,

$$\frac{B_k}{k} \equiv \frac{B_l}{l} \pmod{p}.$$

La fonction Zeta de Riemann

Soit $s \in (1, \infty)$, alors la série suivante converge

$$\zeta(s) := 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots .$$

C'est ce que l'on appelle la fonction Zeta de Riemann. Il s'agit d'une fonction très importante en théorie des nombres.

La fonction Zeta de Riemann

Soit $s \in (1, \infty)$, alors la série suivante converge

$$\zeta(s) := 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots .$$

C'est ce que l'on appelle la fonction Zeta de Riemann. Il s'agit d'une fonction très importante en théorie des nombres.

Euler a démontré en 1735 que

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

On peut prolonger analytiquement le domaine de définition de ζ sur le plan $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ et obtenir

$$\zeta(-k) = -\frac{B_{k+1}}{k+1}, \qquad k \geq 1.$$

On peut prolonger analytiquement le domaine de définition de ζ sur le plan $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ et obtenir

$$\zeta(-k) = -\frac{B_{k+1}}{k+1}, \qquad k \geq 1.$$

De plus,

$$\zeta(2k) = (-1)^{k-1} \frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!} B_{2k}, \qquad k \geq 1.$$

Par exemple, $\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$

Nombre de classes d'un corps quadratique imaginaire

- $p \geq 5$ un premier tel que $p \equiv 3 \pmod 4$;

Nombre de classes d'un corps quadratique imaginaire

- $p \geq 5$ un premier tel que $p \equiv 3 \pmod 4$;
- $k := (p+1)/2$;

Nombre de classes d'un corps quadratique imaginaire

- $p \geq 5$ un premier tel que $p \equiv 3 \pmod 4$;
- $k := (p+1)/2$;
- $K := \mathbb{Q}(\sqrt{-p})$, (corps de nombre quadratique imaginaire) ;

Nombre de classes d'un corps quadratique imaginaire

- $p \geq 5$ un premier tel que $p \equiv 3 \pmod 4$;
- $k := (p+1)/2$;
- $K := \mathbb{Q}(\sqrt{-p})$, (corps de nombre quadratique imaginaire) ;
- $h(K)$ le nombre de classes de K.

Nombre de classes d'un corps quadratique imaginaire

- $p \geq 5$ un premier tel que $p \equiv 3 \pmod 4$;
- $k := (p+1)/2$;
- $K := \mathbb{Q}(\sqrt{-p})$, (corps de nombre quadratique imaginaire) ;
- $h(K)$ le nombre de classes de K.

Alors,

$$h(K) \equiv -2B_k \pmod p.$$

Nombre de classes d'un corps quadratique réel

- p un premier tel que $p \equiv 1 \pmod 4$;

Nombre de classes d'un corps quadratique réel

- p un premier tel que $p \equiv 1 \pmod 4$;
- $k := (p-1)/2$;

Nombre de classes d'un corps quadratique réel

- p un premier tel que $p \equiv 1 \pmod 4$;
- $k := (p-1)/2$;
- $K := \mathbb{Q}(\sqrt{p})$, (corps de nombre quadratique réel) ;

Nombre de classes d'un corps quadratique réel

- p un premier tel que $p \equiv 1 \pmod 4$;
- $k := (p-1)/2$;
- $K := \mathbb{Q}(\sqrt{p})$, (corps de nombre quadratique réel) ;
- $(t + u\sqrt{p})/2$ une unité fondamentale de K ;

Nombre de classes d'un corps quadratique réel

- p un premier tel que $p \equiv 1 \pmod 4$;
- $k := (p-1)/2$;
- $K := \mathbb{Q}(\sqrt{p})$, (corps de nombre quadratique réel) ;
- $(t + u\sqrt{p})/2$ une unité fondamentale de K ;
- $h(K)$ le nombre de classes de K.

Nombre de classes d'un corps quadratique réel

- p un premier tel que $p \equiv 1 \pmod 4$;
- $k := (p-1)/2$;
- $K := \mathbb{Q}(\sqrt{p})$, (corps de nombre quadratique réel) ;
- $(t + u\sqrt{p})/2$ une unité fondamentale de K ;
- $h(K)$ le nombre de classes de K.

Alors,

$$\frac{u}{t} h(K) \equiv B_k \pmod p.$$

C'est la congruence d'Ankeny-Artin-Chowla

Conjecture d'Ankeny-Artin-Chowla

La congruence d'AAC : $\frac{u}{t}h(K) \equiv B_k \pmod{p}$.

Conjecture. $u \not\equiv 0 \pmod{p}$.

Cette conjecture est équivalente au fait que $p \nmid B_k$ (rappel : $k = (p-1)/2$).

Conjecture sur les premiers réguliers

Un premier p est dit régulier si p ne divise pas les numérateurs de

$$B_2, B_4, B_6, \ldots, B_{p-3}$$

Conjecture sur les premiers réguliers

Un premier p est dit régulier si p ne divise pas les numérateurs de

$$B_2, B_4, B_6, \ldots, B_{p-3}$$

Autre formulation : p est régulier ssi $p \nmid h(K)$ où $K = \mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{p}})$.

Conjecture sur les premiers réguliers

Un premier p est dit régulier si p ne divise pas les numérateurs de

$$B_2, B_4, B_6, \ldots, B_{p-3}$$

Autre formulation : p est régulier ssi $p \nmid h(K)$ où $K = \mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{p}})$.

Conjecture. Il existe une infinité de premiers réguliers.

Merci de votre écoute !

Références

- Arakawa, Tsuneo and Ibukiyama, Tomoyoshi and Kaneko, Masanobu, *Bernoulli Numbers and Zeta Functions*. Springer Monographs in Mathematics, 2014
- Bernd C. Keller, *The Bernoulli Number Page*. https ://www.bernoulli.org/, 2018
- Agoh, Takashi, *Congruences related to the Ankeny-Artin-Chowla conjecture.* Integers 16, 2016